浙江省 2024 年选拔优秀高职高专毕业生进入本科学习统一考试

高等数学（下附答案）

总分：150 分　　考试时间：150 分钟

VIP 编号__________　学员姓名__________　考试成绩__________

选择题部分

注意事项：

1、答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

2、每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1、已知函数 $f(x)=\begin{cases}3\cos x-2, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$，则 $x=0$ 是函数的（　　）

A.连续点　　B.可去间断点　　C.跳跃间断点　　D.无穷间断点

2、若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-ax^2)}{x^2}=-3$，则 $a=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3、$f(x)$ 的原函数为 $(x-1)e^x$，则 $f(x)=$（　　）

A. xe^x　　B. $(x-1)e^x+C$　　C. $(x-2)e^x$　　D. $(x-2)e^x+C$

4、微分方程 $y''+4y'+8y=e^{2x}\sin x$ 的特解 y^* 应设为（　　）

A. $e^{-2x}(a\cos x+b\sin x)$　　B. $e^{2x}(a\cos x+b\sin x)$

C. $e^{-2x}(a\cos 2x+b\sin 2x)$　　D. $e^{2x}(a\cos 2x+b\sin 2x)$

5、下列级数绝对收敛的是（　　）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2}{2^n+1}$

非选择题部分

注意事项：

1、用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试题卷上。

2、在答题纸上作图，可先使用 2B 铅笔，确定后必须使用黑色字迹的签字笔或钢笔描黑。

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

6、函数 $f(x)=x^2+2$，则 $f[f(1)]=$_________

7、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{\sin 3x}=$_________

8、函数满足 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(5-\dfrac{1}{3}h)-f(5)]=2$，则 $f'(5)=$_________

9、函数 $y=\tan(x^3-1)$，则 $dy=$_________

10、曲线 $x^3y^3+3x+e^y=4$ 在 $(1,0)$ 处切线方程为_________

11、函数 $y=\dfrac{x^2}{1-x}$ 的斜渐近线为_________

12、设 $\int f(x)dx=\sin\sqrt{x}+C$，则 $\int x^3 f(1+x^4)dx=$_________

13、函数 $f(x)=x-2\sqrt{x+2}$ 在闭区间 $[-2,2]$ 上的最小值是_________

14、设函数 $f(x)$ 连续，$F(x)=\int_8^{x^3} xf(t)dt$ 且 $f(8)=3$，则 $F'(2)=$_________

15、广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+6x+18}dx=$_________

三、计算题（本大题共有 8 小题，其中 16-19 小题每小题 7 分，20-23 小题每小题 8 分，共 60 分。计算题必须写出计算过程，只写答案的不给分）

16、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{\sqrt{1-x^2}-1}$

17、设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\arctan x，& x<0\\ ax+b，& x\geq 0\end{cases}$ 可导，求 a，b

18、设 $y=(x^2+1)e^x$，求 $y^{(5)}(1)$ 的值

19、求不定积分 $\int x^2(3-2\cos^2 x)dx$

20、设 $f(x)=\begin{cases} 2x, & x<0 \\ \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}, & x\geq 0 \end{cases}$，求定积分 $\int_{-2}^{1} f(x)dx$

21、设三点 $O(0,0,0)$，$A(3,-5,4)$，$B(-1,1,t)$ 满足 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$，求 t，并求过 O，A，B 三点的平面方程

22、将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-6}$ 展开成 $(x+2)$ 的幂级数，并写出收敛区间

23、求曲线 $\begin{cases} x=2t^3+3t \\ y=te^{t^2} \end{cases}$ 的凹凸区间

四、综合题（本大题共三题，每小题 10 分，共 30 分）

24、设 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $x=0$，$y=3$ 所围成的第一象限内的平面图形

（1）求平面图形 D 的面积

（2）直线 $y=kx$ 把平面图形 D 分为平面图形 D_1 与平面图形 D_2，若 D_1 与 D_2 分别绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积相等，求 k 的值

25、设可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\int_0^{x-1}(t+2)f(t+1)\mathrm{d}t+(x+1)^2$

（1）求 $f(1)$ 的值

（2）求 $f(x)$

26、设函数 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$（$a_0\neq 0$，$n\geq 2$）有 n 个不同的零点，证明：

（1）$f(x)$ 的零点都不是 $f'(x)$ 的零点

（2）$f(x)f''(x)<[f'(x)]^2$

浙江省 2024 年选拔优秀高职高专毕业生进入本科学习统一考试

高等数学（答案）

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1、已知函数 $f(x)=\begin{cases}3\cos x-2, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$，则 $x=0$ 是函数的（　　）

A.连续点　　B.可去间断点　　C.跳跃间断点　　D.无穷间断点

答案：A

解：① $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(3\cos x-2)=1$

② $f(0)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+1)=1$

因为 $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$

所以 $x=0$ 是函数的连续点

2、若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-ax^2)}{x^2}=-3$，则 $a=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

答案：C

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-ax^2)}{x^2}\overset{\text{分子等价}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-ax^2}{x^2}=-a=-3\Rightarrow a=3$

3、$f(x)$ 的原函数为 $(x-1)e^x$，则 $f(x)=$（　　）

A. xe^x　　B. $(x-1)e^x+C$　　C. $(x-2)e^x$　　D. $(x-2)e^x+C$

答案：A

解：$f(x)=[(x-1)e^x]'=e^x+(x-1)e^x=xe^x$

4、微分方程 $y''+4y'+8y=e^{2x}\sin x$ 的特解 y^* 应设为（　　）

A. $e^{-2x}(a\cos x+b\sin x)$　　B. $e^{2x}(a\cos x+b\sin x)$

C. $e^{-2x}(a\cos 2x+b\sin 2x)$　　D. $e^{2x}(a\cos 2x+b\sin 2x)$

答案：B

解：①对齐次方程：$y''+4y'+8y=0$

设特征方程为：$r^2+4r+8=0\Rightarrow r=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-32}}{2}=\dfrac{-4\pm 4i}{2}=-2\pm 2i$

②对非齐次方程：$y''+4y'+8y=e^{2x}\sin x=e^{2x}(0\cdot\cos x+1\cdot\sin x)$

设特解为 $y^*=x^k e^{2x}(a\cos x+b\sin x)$

其中 $\lambda=2$，$\omega=1$，$\lambda\pm\omega i=2\pm i$ 不是特征方程的根，即 $\lambda\pm\omega i\neq r$，得 $k=0$

所以非齐次方程的特解为：$y^*=e^{2x}(a\cos x+b\sin x)$

5、下列级数绝对收敛的是（　　）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2}{2^n+1}$

答案：D

解：A 选项：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}=1\neq 0$，所以级数发散

B 选项：正项级数，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1>0$，其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散

由比较判别法极限形式可知，级数发散

C 选项：①交错级数，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1>0$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ 发散

②又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}>\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=0$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ 收敛且为条件收敛

D 选项：交错级数，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{n^2}{2^n+1}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}+1}\cdot\dfrac{2^n+1}{n^2}=\dfrac{1}{2}<1$，由比值判别法可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n+1}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2}{2^n+1}$ 为绝对收敛

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

6、函数 $f(x)=x^2+2$，则 $f[f(1)]=$__________

答案：11

解：$f(1)=3$，$f[f(1)]=f(3)=9+2=11$

7、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{\sin 3x}=$__________

答案：$\dfrac{1}{3}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{\sin 3x}\overset{\text{分母等价}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{3x}\overset{\text{约分}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{1}{3}$

8、函数满足 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(5-\dfrac{1}{3}h)-f(5)]=2$，则 $f'(5)=$__________

答案：-6

解：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(5-\frac{1}{3}h)-f(5)}{h}=-\dfrac{1}{3}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(5-\frac{1}{3}h)-f(5)}{-\frac{1}{3}h}=-\dfrac{1}{3}f'(5)=2\Rightarrow f'(5)=-6$

9、函数 $y=\tan(x^3-1)$，则 $dy=$__________

答案：$3x^2\sec^2(x^3-1)dx$ 或写 $\dfrac{3x^2}{\cos^2(x^3-1)}dx$ 也可以

解：$y'=\sec^2(x^3-1)\cdot 3x^2=3x^2\sec^2(x^3-1)\Rightarrow dy=3x^2\sec^2(x^3-1)dx$

10、曲线 $x^3y^3+3x+e^y=4$ 在 $(1,0)$ 处切线方程为__________

答案：$y=-3x+3$

解：①方程两边对 x 求导，得 $3x^2y^3+x^3 3y^2y'+3+e^y y'=0$

②将 $x=1$，$y=0$ 代入得：$0+3+y'=0\Rightarrow y'(1)=-3$

所以切线方程为 $y-0=-3(x-1)\Rightarrow y=-3x+3$

11、函数 $y=\dfrac{x^2}{1-x}$ 的斜渐近线为_________

答案： $y=-x-1$

解：斜渐近线为 $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(1-x)x}\overset{\text{抓大头}}{=}-1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}[\frac{x^2}{1-x}+x]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x(1-x)}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x}\overset{\text{抓大头}}{=}-1$$

所以斜渐近线为 $y=-x-1$

12、设 $\int f(x)dx=\sin\sqrt{x}+C$，则 $\int x^3 f(1+x^4)dx=$_________

答案： $\frac{1}{4}\sin\sqrt{1+x^4}+C$（$C$ 为任意常数）

解： $\int x^3 f(1+x^4)dx=\frac{1}{4}\int f(1+x^4)dx^4=\frac{1}{4}\int f(1+x^4)d(1+x^4)=\frac{1}{4}\sin\sqrt{1+x^4}+C$

13、函数 $f(x)=x-2\sqrt{x+2}$ 在闭区间 $[-2,2]$ 上的最小值是_________

答案： -3

解：① $f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x+2}}$

令 $f'(x)=0$ 时， $\sqrt{x+2}-1=0\Rightarrow\sqrt{x+2}=1$，得 $x=-1$

② $f(-1)=-1-2=-3$

$f(-2)=-2-2\times0=-2$， $f(2)=2-2\times2=-2$

所以最小值是 $f(-1)=-3$

14、设函数 $f(x)$ 连续， $F(x)=\int_8^{x^3}xf(t)dt$ 且 $f(8)=3$，则 $F'(2)=$_________

答案： 72

解： $F(x)=\int_8^{x^3}xf(t)dt=x\int_8^{x^3}f(t)dt$

两边对 x 求导得：$F'(x)=\int_8^{x^3}f(t)dt+xf(x^3)\cdot 3x^2=\int_8^{x^3}f(t)dt+3x^3f(x^3)$

当 $x=2$ 时，$F'(2)=\int_8^8 f(t)dt+24f(8)=0+24\times 3=72$

15、广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+6x+18}dx=$__________

答案：$\frac{\pi}{12}$

解：$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+6x+18}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+3)^2+3^2}d(x+3)=\frac{1}{3}\arctan\frac{x+3}{3}\Big|_0^{+\infty}$

$$=\frac{1}{3}\arctan(+\infty)-\frac{1}{3}\arctan 1=\frac{1}{3}\times\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$

三、计算题（本大题共有 8 小题，其中 16-19 小题每小题 7 分，20-23 小题每小题 8 分，共 60 分。计算题必须写出计算过程，只写答案的不给分）

16、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{\sqrt{1-x^2}-1}$

答案：-1

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{\sqrt{1-x^2}-1}\overset{分母等价}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{-\frac{1}{2}x^2}\overset{\frac{0}{0}洛}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{-x}\overset{\frac{0}{0}洛}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{-1}\overset{代入}{=}-1$

17、设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\arctan x, & x<0\\ ax+b, & x\ge 0\end{cases}$ 可导，求 a，b

答案：$a=b=1$

解：① $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 $\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

②先看连续

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+\arctan x)=1$，$f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(ax+b)=b$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$

所以 $b=1$

③再看可导

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1+\arctan x-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax+b-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{x}=a$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 $\Rightarrow f_-'(0)=f_+'(0)$

所以 $a=1$

18、设 $y=(x^2+1)e^x$，求 $y^{(5)}(1)$ 的值

答案：$32e$

解：$y^{(5)}=C_5^0(x^2+1)(e^x)^{(5)}+C_5^1(x^2+1)'(e^x)^{(4)}+C_5^2(x^2+1)''(e^x)^{(3)}$
$=(x^2+1)e^x+10xe^x+20e^x=(x^2+10x+21)e^x$

所以 $y^{(5)}(1)=32e$

19、求不定积分 $\int x^2(3-2\cos^2 x)dx$

答案：$\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$（$C$ 为任意常数）

解：$\int x^2(3-2\cos^2 x)dx=\int x^2[3-(1+\cos 2x)]dx=\int x^2(2-\cos 2x)dx$

$$=2\int x^2dx-\int x^2\cos 2xdx=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}\int x^2d\sin 2x$$

$$=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\sin 2x+\frac{1}{2}\int \sin 2xdx^2$$

$$=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\sin 2x+\int x\sin 2xdx$$

$$=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\sin 2x-\frac{1}{2}\int xd\cos 2x$$

$$=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{2}\int \cos 2xdx$$

$$=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

20、设 $f(x)=\begin{cases}2x, & x<0\\ \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}, & x\ge 0\end{cases}$，求定积分 $\int_{-2}^{1}f(x)dx$

答案：$-\frac{10}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}$

解：① $\int_{-2}^{1}f(x)dx=\int_{-2}^{0}2xdx+\int_{0}^{1}\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$

②其中 $\int_{-2}^{0}2xdx=x^2\Big|_{-2}^{0}=-4$

③其中 $\int_{0}^{1}\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$：令 $x=\tan t$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^3 t}{\sec t}\mathrm{d}\tan t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^3 t}{\sec t}\sec^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 t\cdot\sec t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 t\mathrm{d}\sec t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 t-1)\mathrm{d}\sec t=(\frac{1}{3}\sec^3 t-\sec t)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

所以$\int_{-2}^1 f(x)dx=\int_{-2}^0 2xdx+\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx=-4+\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}=-\frac{10}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}$

21、设三点$O(0,0,0)$，$A(3,-5,4)$，$B(-1,1,t)$满足$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{AB}|$，求$t$，并求过$O$，$A$，$B$三点的平面方程

答案：$7x+5y+z=0$

解：①$\overrightarrow{OA}=(3,-5,4)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,1,t)$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(2,-4,4+t)\Rightarrow|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=20+(4+t)^2$

$\overrightarrow{AB}=(-4,6,t-4)\Rightarrow|\overrightarrow{AB}|^2=52+(t-4)^2$

②因为$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{AB}|$

所以$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2\Rightarrow t=2$

③平面的法向量为

$$\vec{n}=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-5&4\\-1&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&4\\1&2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3&4\\-1&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3&-5\\-1&1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-14\vec{i}-10\vec{j}-2\vec{k}=(-14,-10,-2)=-2(7,5,1)$$

由平面的点法式方程得：$7(x-0)+5(y-0)+(z-0)=0\Rightarrow 7x+5y+z=0$

22、将$f(x)=\frac{1}{x^2+x-6}$展开成$(x+2)$的幂级数，并写出收敛区间

答案：$f(x)=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{4^{n+1}}+(-1)^n](x+2)^n$，$x\in(-3,-1)$

解：①利用公式：$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$，$x\in(-1,1)$，$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，$x\in(-1,1)$

②$f(x)=\frac{1}{x^2+x-6}=\frac{1}{(x-2)(x+3)}=\frac{1}{5}(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3})$

③其中

$$\frac{1}{x-2}=\frac{1}{-4+(x+2)}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+2}{4}}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x+2}{4})^n,\frac{x+2}{4}\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{x+3}=\frac{1}{1+(x+2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+2)^n，\ x+2\in(-1,1)$$

④ $\begin{cases}-1<\frac{x+2}{4}<1\\-1<x+2<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4<x+2<4\\-3<x<-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6<x<2\\-3<x<-1\end{cases}\Rightarrow -3<x<-1$

所以 $f(x)=\frac{1}{x^2+x-6}=\frac{1}{(x-2)(x+3)}=\frac{1}{5}(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3})$

$$=\frac{1}{5}[-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x+2}{4})^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+2)^n]$$

$$=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{4^{n+1}}+(-1)^n](x+2)^n$$

即 $f(x)=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{4^{n+1}}+(-1)^n](x+2)^n$， $x\in(-3,-1)$

23、求曲线 $\begin{cases}x=2t^3+3t\\y=te^{t^2}\end{cases}$ 的凹凸区间

答案：凹区间 $(0,+\infty)$，凸区间 $(-\infty,0)$

解：①定义域 $(-\infty,+\infty)$

② $\frac{dy}{dt}=e^{t^2}+te^{t^2}\cdot 2t=e^{t^2}+2t^2e^{t^2}=e^{t^2}(1+2t^2)$， $\frac{dx}{dt}=6t^2+3=3(2t^2+1)$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^{t^2}(1+2t^2)}{3(2t^2+1)}=\frac{1}{3}e^{t^2}$$

③ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{3}e^{t^2}\cdot 2t}{3(2t^2+1)}=\frac{2te^{t^2}}{9(2t^2+1)}$，即 $y''=\frac{2te^{t^2}}{9(2t^2+1)}$

令 $y''=0$ 得 $t=0$，当 $x>0$ 时， $y''>0$，当 $x<0$ 时， $y''<0$

所以凹区间 $(0,+\infty)$，凸区间 $(-\infty,0)$

四、综合题（本大题共三题，每小题 10 分，共 30 分）

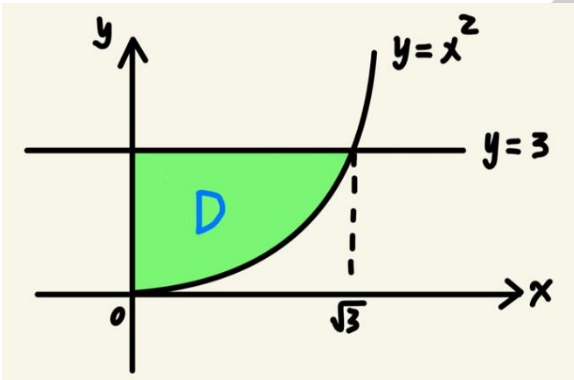
24、设 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $x=0$， $y=3$ 所围成的第一象限内的平面图形

（1）求平面图形 D 的面积

（2）直线 $y=kx$ 把平面图形 D 分为平面图形 D_1 与平面图形 D_2，若 D_1 与 D_2 分别绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积相等，求 k 的值

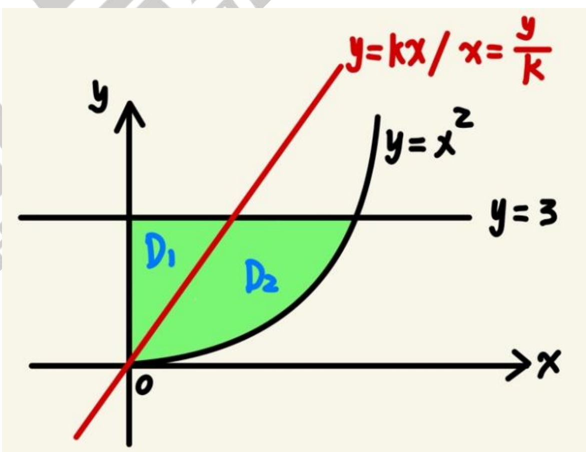
答案：（1） $S=2\sqrt{3}$；（2） $k=\frac{5}{3}\sqrt{3}$

解：（1）如下图



由图知： $S=\int_0^{\sqrt{3}}(3-x^2)dx=2\sqrt{3}$

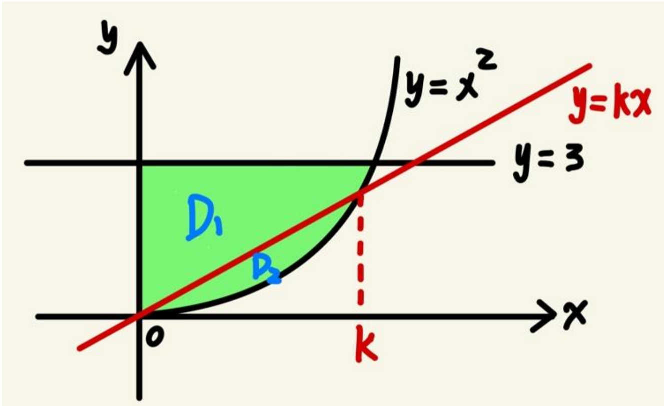
（2）①当 $k>\sqrt{3}$ 时



$$V_1=2\pi\int_0^3 y\frac{y}{k}dy=\frac{18}{k}\pi,\quad V_2=2\pi\int_0^3 y(\sqrt{y}-\frac{y}{k})dy=\frac{36}{5}\sqrt{3}\pi-\frac{18}{k}\pi$$

由题知： $V_1=V_2$，即 $\frac{18}{k}\pi=\frac{36}{5}\sqrt{3}\pi-\frac{18}{k}\pi\Rightarrow k=\frac{5}{3}\sqrt{3}$

②当 $0<k\le\sqrt{3}$ 时



$$V_1=\pi\int_0^{\sqrt{3}}[3^2-(x^2)^2]dx-\pi\int_0^k[(kx)^2-(x^2)^2]dx=\frac{36}{5}\sqrt{3}\pi-\frac{2}{15}k^5\pi$$

$$V_2=\pi\int_0^k[(kx)^2-(x^2)^2]dx=\frac{2}{15}k^5\pi$$

由题知：$V_1=V_2$，即 $\frac{36}{5}\sqrt{3}\pi-\frac{2}{15}k^5\pi=\frac{2}{15}k^5\pi\Rightarrow k=\sqrt[5]{27\sqrt{3}}>\sqrt{3}$（舍）

综上，$k=\frac{5}{3}\sqrt{3}$

25、设可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\int_0^{x-1}(t+2)f(t+1)\mathrm{d}t+(x+1)^2$

（1）求 $f(1)$ 的值

（2）求 $f(x)$

答案：（1）$f(1)=4$；（2）$f(x)=6e^{\frac{1}{2}(x+1)^2-2}-2$ 或写 $f(x)=6e^{\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}}-2$ 也可以

解：（1）当 $x=1$ 时，$f(1)=\int_0^0(t+2)f(t+1)\mathrm{d}t+(1+1)^2=4$

（2）两边对 x 求导得：$f'(x)=(x-1+2)f(x-1+1)+2(x+1)$

即 $f'(x)-(x+1)f(x)=2(x+1)$，其中 $P(x)=-(x+1)$，$Q(x)=2(x+1)$

$$f(x)=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]=e^{\int(x+1)dx}[\int 2(x+1)e^{-\int(x+1)dx}dx+C]$$

$$=e^{\frac{1}{2}(x+1)^2}[\int 2(x+1)e^{-\frac{1}{2}(x+1)^2}dx+C]=e^{\frac{1}{2}(x+1)^2}[\int e^{-\frac{1}{2}(x+1)^2}d(x+1)^2+C]$$

$$=e^{\frac{1}{2}(x+1)^2}\left(-2\int e^{-\frac{1}{2}(x+1)^2}d[-\frac{1}{2}(x+1)^2]+C\right)$$

$$=e^{\frac{1}{2}(x+1)^2}[-2e^{-\frac{1}{2}(x+1)^2}+C]$$

将 $f(1)=4$ 代入得：$4=e^2(-2e^{-2}+C)\Rightarrow C=6e^{-2}$

所以 $f(x)=6e^{\frac{1}{2}(x+1)^2-2}-2$

26、设函数 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$（$a_0\neq 0$，$n\geq 2$）有 n 个不同的零点，证明：

（1） $f(x)$ 的零点都不是 $f'(x)$ 的零点

（2） $f(x)f''(x)<[f'(x)]^2$

答案：/

解：（1）设 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=\cdots=f(x_n)=0$（其中 $x_1<x_2<\cdots<x_n$），显然函数 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上连续，在 (x_1,x_n) 上内导

由罗尔中值定理得：$\exists\varepsilon_1\in(x_1,x_2)$，使得 $f'(\varepsilon_1)=0$；$\exists\varepsilon_2\in(x_2,x_3)$，使得 $f'(\varepsilon_2)=0$；…；同理可得，$\exists\varepsilon_{n-1}\in(x_{n-1},x_n)$，使得 $f'(\varepsilon_{n-1})=0$

因为 $f'(x)=0$ 是 $n-1$ 次方程，最多只有 $n-1$ 个实根，所以 $f'(x)$ 有 $n-1$ 个零点.由于 $f'(x)$ 的零点都落在 $f(x)$ 的零点之间，所以 $f(x)$ 的零点不是 $f'(x)$ 的零点

（2）由（1）可知，当 $f(x)=0$ 时，$f'(x)\neq 0$，此时 $f(x)f''(x)<[f'(x)]^2$ 恒成立

当 $f(x)\neq 0$ 时，因为 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$（$a_0\neq 0$，$n\geq 2$）有 n 个不同的零点

不妨设 $f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$（其中 $x_1<x_2<\cdots<x_n$）

$$f'(x)=a_0(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)+a_0(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$$
$$+\cdots+a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1})$$

可得 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x-x_1}+\dfrac{1}{x-x_2}+\dfrac{1}{x-x_3}+\cdots+\dfrac{1}{x-x_n}$

$$[\frac{f'(x)}{f(x)}]'=-\frac{1}{(x-x_1)^2}-\frac{1}{(x-x_2)^2}-\frac{1}{(x-x_3)^2}-\cdots-\frac{1}{(x-x_n)^2}$$

显然 $[\dfrac{f'(x)}{f(x)}]'<0$，即 $[\dfrac{f'(x)}{f(x)}]'=\dfrac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}<0$

因为$[f(x)]^2>0$，所以$f''(x)f(x)-[f'(x)]^2<0$

综上，$f(x)f''(x)<[f'(x)]^2$成立