

浙江省 2023 年选拔优秀高职高专毕业生进入本科学习统一考试

数学

考试说明:

1. 考试时间为 150 分钟。
2. 满分为 150 分。
3. 在答题前, 考生务必将自己的姓名、VIP 编号、班型、考试科目用铅笔涂写在答题卷上。

选择题部分

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。
2. 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。不能答在试题卷上。

一、 选择题: 本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x, & x \geq 0 \\ -\sin x, & x < 0 \end{cases}$, 则 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的 ()

- A. 连续点 B. 跳跃间断点 C. 可去间断点 D. 无穷间断点

2. 设函数 $f(x) = \tan x - 20$, 则 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 等于 ()

- A. 2 B. 0 C. -18 D. -20

3. 下列四个命题正确的是 ()

- A. 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导.
- B. 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有最大值和最小值.
- C. 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必存在原函数.
- D. 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上导函数相等, 则 $f(x) = g(x)$.

4. 微分方程 $y'' + 2y' + 10y = 0$ 的通解是 ()

A. $y = e^{3x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

B. $y = e^{-3x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

B. $y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

D. $y = e^{-x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

5. 下列四个项级数中收敛的是 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

非选择题部分

注意事项:

1. 用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上, 不能答在试题卷上。
2. 在答题纸上作图, 可先使用2B铅笔, 确定后必须使用黑色字迹的签字笔或钢笔描黑。

二、填空题: 本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。

6. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & |x| \geq 1 \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}$, 则 $f[f(x)] =$ _____

7. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+4}{2x+3} \right)^{x+3} =$ _____

8. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $1 - \cos ax (a > 0)$ 与 x^2 是等价无穷小, 则 $a =$ _____

9. 设函数 $f(x) = \sqrt{4x+1}$, 则 $f''(2) =$ _____

10. 设函数 $y = \sin(1 + \ln x)$, 则 $dy =$ _____

11. 若函数 $f(x)$ 满足 $f'(2) = 1$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[f\left(2 + \frac{h}{2}\right) - f\left(2 - \frac{h}{2}\right) \right] =$ _____

12. 曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = 1 + t + \arctan t \end{cases}$, 在 $t = 0$ 相应的点处切线方程是 _____

13. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $\int_0^9 f(x) dx = 10$, 则 $\int_0^3 xf(x^2) dx =$ _____

14. 极限 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3} \int_3^x \frac{\sin t}{t} dt =$ _____

15. 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{(x+1)^3}} dx =$ _____

三、计算题：本题共有 8 小题，其中 16-19 小题每小题 7 分，20-23 小题每小题 8 分，共 60 分。

计算题必须写出必要的计算过程，只写答案的不给分。

16. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + 2e^{-x} - 3}{x \ln(1+x)}$.

17. 求由方程 $\sin(x+y) + e^{xy} - 3 = 0$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$.

18. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx$.

19. 求由曲线 $y = \sin x$ 与直线 $y = 2x$ 及 $x = \pi$ 所围成的图形的面积.

20. 求不定积分 $\int \frac{1 + \ln^2 x}{x^2} dx$.

21. 求过 $P(1, -1, -1)$ 且与直线 $\begin{cases} x - 2y + 4z - 7 = 0 \\ 3x - 5y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$ 平行的直线方程，并求点 P 到平面 $3x - 2y + 2z + 3 = 0$ 的距离.

22. 求微分方程 $y' + \frac{2}{1+x} y = e^x$ 的通解.

23. 设函数 $y = \frac{2x^2}{3x+1}$ ，试确定函数的单调区间，并求曲线 $y = \frac{2x^2}{3x+1}$ 的渐近线.

四、综合题：本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分。

24. 设曲线 $y = \sqrt{x-1}$ 与直线 $y = a (0 < a < 2)$ 及 $x = 0, y = 0$ 所围成的平面图形为 S_1 ，由曲线 $y = \sqrt{x-1}$ 与直线 $y = a$ 及 $x = 5$ 所围成的平面图形为 S_2 .

(1) 求 S_1, S_2 分别绕 x 轴旋转一周而成的旋转体积 V_1, V_2 (用 a 表示)

(2) 当 a 为何值时， $V_1 + V_2$ 取得最小值？求此最小值.

25. (1) 当函数 $\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

(2) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^n$ 的收敛区间.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ 的值.

26. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 内具有二阶导数, 且 $f(1) = 0$, $f''(x) \geq 0$.

(1) 在区间 $(0, 2)$ 内写出 $f(x)$ 在 x_0 处带有拉格朗日余项的一阶泰勒公式, 并证明: $f(x) \leq f'(x)(x-1)$, $x \in (0, 2)$.

(2) 证明: 当 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时, 有 $(1-x)f\left(x+\frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{2}-x\right)f(x)$.